УДК 517.925.5

А. Е. Шнейдер

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*

Вопрос устойчивости дифференциального уравнения

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \mu p(t)x = 0$$

с ω-периодической интегрируемой кусочно непрерывной функцией $p(t)$ и параметром μ при $n \geq 3$ рассматривался в работах ряда авторов (см., например, [1]). Были получены достаточные критерии устойчивости решения уравнения третьего, четвертого и более высоких порядков при соответствующих предположениях о свойствах функции $p(t)$. В данной работе устойчивость уравнения при $n \geq 3$ решается методом Ляпунова оценки характеристической постоянной [2–4] с использованием m-кратных первообразных от исходной периодической функции. Такой подход позволил исследовать устойчивость уравнения как третьего, так и более высоких порядков в рамках единого метода при самых общих предположениях о свойствах функции $p(t)$. Неустойчивость уравнения n-го порядка с ω-периодической функцией $p(t)$ со средним значением, равным нулю, и малым параметром μ при $n > 4$ установлена в работе [5]. Достаточный критерий устойчивости нулевого решения уравнения третьего порядка при $\mu = 1$ получен в работе [6].

1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^3 x}{dt^3} + p(t)x = 0, \tag{1}$$

где $p(t)$ – ω-периодическая интегрируемая кусочно непрерывная функция, отличная от тождественного нуля [6]. Следуя [2, с. 388], положим

$$P(t) - P(0) = \int_0^t p(t)dt, \qquad \int_0^\omega P(t)dt = 0. \tag{2}$$

Обозначим

$$\overline{P}(t) = \int_0^t P(t)dt.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке фонда CRDF (грант №REC-005).

Теорема 1. *Решение уравнения* (1) *устойчиво при выполнении неравенства*

$$3\omega \int_0^\omega \overline{P}^2(t)dt \leq 4. \tag{3}$$

Доказательство. Введем вспомогательный параметр μ и рассмотрим уравнение

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \mu p(t)x, \tag{4}$$

при $\mu = -1$ обращающееся в (1). Записав уравнение (4) в виде системы

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = x_3, \frac{dx_3}{dt} = \mu p(t)x_1, \tag{5}$$

обозначим через $x_{sj}(t,\mu)$ фундаментальную систему решений (5), определяемую начальными условиями

$$x_{sj}(0,\mu) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad s = j, \\ 0 & \text{при} \quad s \neq j \end{cases} \quad (s, j = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Решения $x_{1j}(t,\mu)$ будем искать в виде рядов

$$x_{1j} = x_{1j}^{(0)}(t) + \mu x_{1j}^{(1)}(t) + \mu^2 x_{1j}^{(2)}(t) + \dots \ . \tag{7}$$

Ряды (7) при всех значениях t сходятся для любого μ [3]. Подставляя ряды (7) в систему (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим для определения функций $x_{1j}^{(0)}$, $x_{1j}^{(1)}, \dots$ следующие уравнения:

$$\frac{d^3x_{1j}^{(0)}}{dt^3} = 0, \frac{d^3x_{1j}^{(n)}}{dt^3} = p(t)x_{1j}^{(n-1)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Начальные условия (6) дают

$$x_{sj}^{(0)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad s = j, \\ 0 & \text{при} \quad s \neq j, \end{cases} \quad x_{sj}^{(1)}(0) = x_{sj}^{(2)}(0) = \dots = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} x_{11}^{(0)} = 1, \ x_{12}^{(0)} = t, \ x_{13}^{(0)} = \frac{t^2}{2}, \\ x_{1j}^{(n)} = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} p(t_3)x_{1j}^{(n-1)} dt_1 dt_2 dt_3 \quad (n = 1, 2, \dots). \end{cases} \tag{8}$$

Так как замена t на $-t$ не изменяет уравнение (4), характеристическое уравнение для системы (5) является возвратным [3, с. 205] и имеет вид

$$\rho^3 + A(\mu)\rho^2 + A(\mu)\rho + 1 = 0, \tag{9}$$

где

$$A(\mu) = x_{11}(\omega,\mu) + x_{22}(\omega,\mu) + x_{33}(\omega,\mu). \tag{10}$$

Возвращаясь к уравнению (1), положим $\mu = -1$. После подстановки (7) и (8) в (10) получим коэффициент $A = A(-1)$ характеристического уравнения (10) в виде сходящегося ряда

$$A = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(-1)^n, \tag{11}$$

где $A_n = \sum_{i=1}^{3} x_{ii}^{(n)}(\omega)$.

При выполнении неравенства $(A-1)^2 < 4$ характеристическое уравнение имеет один корень $\mu = -1$ и два комплексных корня с модулями, равными единице. Следовательно, при выполнении неравенства

$$-1 < A < 3$$

решение уравнения (1) устойчиво.

Вычисляем последовательно $x_{1j}^{(n)}(t)$ из (8), используя при каждом интегрировании равенства (2). В итоге получим

$$x_{ii}^{(n)}(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{2n-1}} F_i(t, t_1, \ldots, t_{2n}) dt_{2n}, \tag{12}$$

где $F_i = (P_{3-i} - P_{4-i}) \cdot \ldots \cdot (P_{2n+1-i} - P_{2n+2-i})$, а $P_i = P(t_i)$, $P_{2n+1} = P(0)$, $P_0 = P(t)$, $i = 1, 2, 3$. Положив $t = \omega$, получим выражение для членов ряда (11).

Меняя в (12) порядок интегрирования и используя четность функции $P(t)$, получим, что $A_n = 0$ для нечетных n. Тогда ряд (11) принимает вид

$$A = 3 + A_2 + A_4 + \ldots + A_{2n} + \ldots, \tag{13}$$

где

$$A_{2n} = \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{4n-1}} F_{1,4n} dt_{4n}$$

и $F_{1,4n} = (P_{4n} - P_1)(P_2 - P_3) \cdot \ldots \cdot (P_{4n-2} - P_{4n-1}) + (P_1 - P_2)(P_3 - P_4) \cdot \ldots \cdot (P_{4n-1} - P_{4n})$. Можно показать, что последний интеграл представим в следующем виде, где внешнее интегрирование производится на отрезке $[0, \omega/2]$:

$$A_{2n} = \int_0^{\omega/2} dt_{4n} \int_0^{t_{4n}} dt_{4n-1} \cdots \int_0^{t_2} F_{1,4n} dt_1 + B_{2n} + \\ + \int_0^{\omega/2} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{4n-1}} F_{1,4n} dt_{4n}, \tag{14}$$

где

$$B_{2n} = \tag{15}$$
$$= \sum_{k=1}^{4n-1} \int_0^{\omega/2} dt_k \int_0^{t_k} dt_{k-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \int_0^{\omega/2} dt_{k+1} \int_0^{t_{k+1}} dt_{k+2} \cdots \int_0^{t_{4n-1}} F_{1,4n} dt_{4n}.$$

Интеграл из суммы (15), отвечающий любому k, может быть преобразован к сумме $4n$-кратных интегралов, которые мы получим, учитывая, что каждая из переменных $t_1, t_2, \ldots, t_k$ находится в одном из промежутков

$$(0, t_{4n}), (t_{4n}, t_{4n-1}), \ldots, (t_{k+1}, \omega/2).$$

Чтобы упорядочить нужным образом сумму интегралов (15), используем формулу, доказательство которой опустим:

$$\int_{t_i}^{\omega/2} dt_{k+1} \int_{t_i}^{t_{k+1}} dt_{k+2} \cdots \int_{t_i}^{t_{4n-1}} F_{1,4n} dt_{4n} =$$
$$= \int_{t_j}^{\omega/2} dt_{k+1} \int_{t_j}^{t_{k+1}} dt_{k+2} \cdots \int_{t_j}^{t_{4n-1}} F_{1,4n} dt_{4n} +$$
$$+ \int_{t_{4n}}^{\omega/2} dt_{k+1} \cdots \int_{t_{4n}}^{t_{4n-2}} dt_{4n-1} \int_{t_i}^{t_j} F_{1,4n} dt_{4n}, \tag{16}$$

где t_i и t_j – величины из отрезка $[0, \omega/2]$. Используя (16), преобразуем каждый из интегралов (15) к сумме двух слагаемых: первое слагаемое представляет собой сумму интегралов с первой переменной t_{4n}, а второе – с первой переменной t_1. Подынтегральные выражения в первом и втором слагаемых совпадут, если у переменной t индексы $1, 2, \ldots, 4n$ заменить соответственно индексами $4n, 1, 2, \ldots, 4n-1$. Но при такой замене индексов подынтегральное выражение

$$(P_{4n} - P_1)(P_2 - P_3) \cdot \ldots \cdot (P_{4n-2} - P_{4n-1})$$

преобразуется в выражение

$$(P_1 - P_2)(P_3 - P_4) \cdot \ldots \cdot (P_{4n-1} - P_{4n}). \tag{17}$$

Поэтому в дальнейшем будем преобразовывать $4n$-кратный интеграл с подынтегральной функцией (17). Следуя Ляпунову [4, с. 421] и сохраняя его обозначения, рассмотрим $4n$ переменных $t_1, t_2, \ldots, t_{4n}$ и, понимая под $j_1, j_2, \ldots, j_m$ какие-либо члены последовательности $1, 2, \ldots, 4n$, положим

$$(P_{j_1} - P_{j_2})(P_{j_3} - P_{j_4}) \cdot \ldots \cdot \left(P_{j_{4n-1}} - P_{j_{4n}}\right) = [j_1, \ldots, j_{4n}].$$

Тогда интеграл (14) запишется как

$$A_{2n} = \int_0^{\omega/2} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{4n-1}} [j_1, \dots, j_{4n}]\, dt_{4n}.$$

Далее, используя формулу (16), получим

$$A_{2n} = 3 \int_{t_{4n-3}}^{\omega/2} dt_1 \int_{t_{4n-3}}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_{4n-3}}^{t_{4n-5}} [j_1, \dots, j_{4n-4}]\, dt_{4n-4} \times$$
$$\times \int_0^{\omega/2} dt_{4n-3} \int_0^{4n-3} dt_{4n-2} \cdots \int_0^{t_{4n-1}} G_{4n-3,4n} dt_{4n}.$$

Последнее выражение можно привести к виду

$$A_{2n} = 8 \cdot 3^{n-1} \int_0^{\omega/2} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{4n-1}} G_{1,4} \cdot \ldots \cdot G_{4n-3,4n} dt_{4n}, \tag{18}$$

где $G_{k+1,k+4} = (P_{k+4} - P_{k+1})(P_{k+2} - P_{k+3}) + (P_{k+4} - P_{k+2})(P_{k+1} - P_{k+3})$ и $k = 0, 4, \dots, 4n-4$.

В случае когда либо $p(t) \geq 0$, либо $p(t) \leq 0$ на $[0, \omega/2]$, выражение (18) позволяет немедленно сделать заключение о знаках величин A_{2n}. Действительно, в этом случае функция $P(t)$ монотонна на отрезке $[0, \omega/2]$ и при $\omega/2 > t_1 > \cdots > t_{4n} > 0$ для $k = 0, 4, \dots, 4n-4$ выполняется неравенство $G_{k+1,k+4} \leq 0$. Следовательно, в (13) положительные и отрицательные члены чередуются. Чтобы показать это в общем случае, преобразуем 4-кратный интеграл

$$\int_{t_{k+5}}^{t_k} dt_{k+1} \cdots \int_{t_{k+5}}^{t_{k+3}} G_{k+1,k+4} dt_{k+4} \tag{19}$$

из выражения (18). Подставим в (19) вместо $P_{k+j} (j = 1, \dots, 4)$ разность

$$P_{k+j} - \frac{1}{t_k - t_{k+5}} \int_{t_{k+5}}^{t_k} P(t) dt,$$

что не изменяет подынтегральную функцию $G_{k+1,k+4}$. Интегрируя дважды, заменяя $P(t)$ на $\overline{P(t)}$ и представляя выражения $(t_k - t_{k+1})^2$ и $(t_{k+2} - t_{k+5})^2$ в виде двойных интегралов, найдем, что выражение (19) преобразуется к виду

$$-3 \int_{t_{k+5}}^{t_k} dt_{k+1} \cdots \int_{t_{k+5}}^{t_{k+3}} \left[(P(\xi_{k+3}) - P(\xi_k))^2 + (P(\xi_{k+2}) - P(\xi_k))^2 \right] dt_{k+4}, \tag{20}$$

где каждая из переменных ξ_p $(p = k+2, k+3, k)$ находится в промежутке $t_{k+5} < \xi_p < t_k$. Подставляя в (18) вместо (19) равный ему интеграл (20) и придавая k значения $0, 4, \ldots, 4n-4$, найдем окончательное выражение для членов A_{2n} ряда (13):

$$A_{2n} = (-1) \cdot 8 \cdot 3^{2n-1} \int_0^{\omega/2} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{4n-1}} H_{1,4}^2 \cdot \ldots \cdot H_{4n-3,4n}^2 dt_{4n}, \quad (21)$$

где $H_{k+1,k+4}^2 = (P(\xi_{k+3}) - P(\xi_k))^2 + (P(\xi_{k+2}) - P(\xi_k))^2$.

Рассматривая произведение $A_{2n} \cdot A_2$, убеждаемся, что

$$|A_{2n+2}| \leq \frac{3}{8}\frac{1}{n+1}\, |A_{2n}|\, |A_2|\,,$$

откуда следует, что при $|A_2| \leq 4$ выполняется неравенство $|A_2| > |A_4| > \ldots$ и, следовательно,

$$-1 < A < 3,$$

что доказывает теорему.

Следуя [2, с. 390], рассмотрим ω-периодическую интегрируемую кусочно-непрерывную функцию $p(t)$ в уравнении (1), удовлетворяющую условию

$$p(\alpha - t) = -p(\alpha + t), \quad (22)$$

где $\alpha = \text{const}$. Положим аналогично (2)

$$P(t) - P(\alpha) = \int_\alpha^t p(t)dt, \qquad \int_\alpha^{\omega+\alpha} P(t)dt = 0,$$

и обозначим $\overline{P}(t) = \int_\alpha^t P(t)dt$.

Теорема 2. *Пусть ω-периодическая интегрируемая кусочно-непрерывная функция $p(t)$ удовлетворяет условию* (22). *Тогда решение уравнения* (1) *устойчиво при выполнении неравенства*

$$3\omega \int_\alpha^{\omega+\alpha} \overline{P}^2(t)dt \leq 4.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 с заменой промежутка $[0, \omega]$ на промежуток $[\alpha, \omega+\alpha]$.

Полученный достаточный критерий (3) является точным в смысле, указанном Н. Е. Жуковским: постоянная 4 в правой части неравенства (3) не может быть заменена большей. Для доказательства достаточно рассмотреть пример, в котором функция $p_0(t)$ выбирается в виде

$$p_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \;\; 0 \leq t \leq \omega/4 - \varepsilon, \\ \frac{c}{\varepsilon} & \text{при} \;\; \omega/4 - \varepsilon < t < \omega/4 + \varepsilon, \quad \text{где} \;\; c = \frac{8+\varepsilon}{\omega^2}, \\ 0 & \text{при} \;\; \omega/4 + \varepsilon \leq t \leq \omega/2, \end{cases}$$

$$p_0(-t) = -p_0(t), \; p_0(t+\omega) = p_0(t), \; \varepsilon > 0.$$

Функция $\overline{P_0}(t)$ равна

$$\overline{P_0}(t) = \begin{cases} -ct & \text{при} \quad 0 \le t \le \omega/4 - \varepsilon, \\ \frac{c(t-\omega/4)^2}{2\varepsilon} - c(\omega/4 - \varepsilon/2) & \text{при} \quad \omega/4 - \varepsilon < t < \omega/4 + \varepsilon, \\ c(t - \frac{\omega}{2}) & \text{при} \quad \omega/4 + \varepsilon \le t \le \omega/2, \end{cases}$$
$$\overline{P_0}(-t) = -\overline{P_0}(t), \; \overline{P_0}(t+\omega) = \overline{P_0}(t),$$

и, следовательно,

$$3\omega \int_0^\omega \overline{P_0}^2(t)dt \le 4 + \varepsilon + o(\varepsilon).$$

В то же время решение уравнения (1) может быть найдено в явном виде и для него имеем

$$A = -1 - \varepsilon + o(\varepsilon),$$

что означает неустойчивость решения уравнения (1) при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$. Это доказывает точность полученного критерия (3).

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4x}{dt^4} + p(t)x = 0 \tag{23}$$

с ω-периодической интегрируемой кусочно-непрерывной функцией $p(t)$ со средним значением, равным нулю. Коэффициенты A_1 и A_2 характеристического уравнения

$$\rho^4 - A_1\rho^3 + A_2\rho^2 - A_1\rho + 1 = 0$$

могут быть выражены через кратные интегралы от функций $P(t)$, где

$$P(t) - P(0) = \int_0^t p^{(1)}(t)dt, \; \int_0^\omega p^{(1)}(t)dt = 0, \; p^{(1)}(t) - p^{(1)}(0) = \int_0^t p(t)dt.$$

Функция $P(t)$ удовлетворяет второму из равенств (2). Подставляя значения коэффициентов A_1 и A_2 в неравенства, выражающие известные [1] условия устойчивости решения уравнения (23), можно убедиться, что справедлива

Теорема 3. *Решение уравнения* (23) *с ω-периодической интегрируемой кусочно-непрерывной функцией $p(t)$, среднее значение которой равно нулю, неустойчиво.*

Найдем в явном виде коэффициент A_1, соответствующий уравнению (23) с кусочно-постоянной функцией

$$p(t) = \begin{cases} -\lambda^4 & \text{при} \quad 0 < t \le \omega/2, \\ \lambda^4 & \text{при} \quad \omega/2 < t \le \omega, \quad p(t+\omega) = p(t). \end{cases}$$

Значение постоянной $A_1(\lambda) = SpY(\omega, \lambda)$ для этого уравнения равно

$$A_1(\lambda) = 2\,\mathrm{ch}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\frac{\omega}{2}(\mathrm{ch}\,\lambda\frac{\omega}{2} + \cos\lambda\frac{\omega}{2})\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\frac{\omega}{2} + \\ + \sqrt{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\frac{\omega}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\frac{\omega}{2}\,\mathrm{sh}\,\lambda\frac{\omega}{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\frac{\omega}{2}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\frac{\omega}{2}\sin\lambda\frac{\omega}{2}. \quad (24)$$

Из (24) выводится, в частности, что зоны $(\lambda_i^+, \lambda_{i+1}^-)$ на λ-оси, обеспечивающие необходимое (но не достаточное) условие устойчивости $-4 < A_1 < 4$, для $i \geq 1$ стягиваются в точку.

3. Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \lambda p(t)x \quad (25)$$

с ω-периодической интегрируемой кусочно-непрерывной функцией $p(t)$ при $n > 4$ [5]. Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (25), без ограничения общности считается возвратным, т. е.

$$\rho^n - A_1\rho^{n-1} + A_2\rho^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}A_1\rho + (-1)^n = 0. \quad (26)$$

Изучение вопроса устойчивости решения уравнения (25), как следует из предыдущего примера, имеет наибольшую практическую значимость при достаточно малых значениях параметра λ, что соответствует нулевой зоне устойчивости $(\lambda_0^+, \lambda_1^-)$. Рассмотрим сначала случай, когда среднее значение функции $p(t)$ равно нулю.

Теорема 4. *Пусть $p(t)$ – ω-периодическая интегрируемая кусочно-непрерывная функция со средним значением, равным нулю. Тогда нулевое решение уравнения* (25) *неустойчиво при $n > 4$ и достаточно малом λ.*

Для доказательства теоремы вводятся функции

$$P^{(m)}(t) - P^{(m)}(0) = \int_0^t P^{(m-1)}(t)dt, P^{(0)}(t) = p(t), \quad (27)$$

где $2m \leq n + 1$ и $P^{(m)}(t)$ $(m = 1, 2, \dots)$ выбираются так, что

$$\int_0^\omega P^{(m)}(t)dt = 0.$$

Коэффициент A_1 характеристического уравнения (26) при достаточно малом λ выражен через кратные интегралы $\tau_1(\omega)$ и $\tau_2(\omega)$ от функции $p(t)$:

$$A_1 = n + \lambda\tau_1(\omega) + \lambda^2\tau_2(\omega) + o(\lambda^2).$$

При этом $\tau_1(\omega) \equiv 0$, $2n$-кратный интеграл $\tau_2(\omega)$ для $n = 2k$ приводится к виду

$$\tau_2(\omega) = \tau_2^{\rm I}(\omega) + (-1)^k \int_0^\omega \left[P^{(k)}(t)\right]^2 dt \frac{\omega^{2k-1}}{(2k-1)!}, \tag{28}$$

причем для кратного интеграла $\tau_2^{\rm I}(\omega)$ справедлива оценка

$$\left|\tau_2^{\rm I}(\omega)\right| \le M_1 \int_0^\omega \left[P^{(k+1)}(t)\right]^2 dt \frac{\omega^{2k-3}}{(2k-3)!}. \tag{29}$$

Для $n = 2k+1$ получена формула

$$\tau_2(\omega) = \tau_2^{\rm II}(\omega) + (-1)^k (2k+1) \int_0^\omega \left[P^{(k+1)}(t)\right]^2 dt \frac{\omega^{2k-1}}{(2k-1)!} \tag{30}$$

с оценкой кратного интеграла $\tau_2^{\rm II}(\omega)$, аналогичной (29).

Для коэффициентов A_m характеристического уравнения (26) при достаточно малом λ выведена формула

$$A_m = C_n^m + \lambda^2 \left\{ C_n^{m-1} \tau_2 \omega) + \ldots + (-1)^{m-1} \frac{1}{m} C_m^0 \tau_2(m\omega) \right\} + o(\lambda^2), \tag{31}$$

где n – порядок исходной системы.

Заменой $p = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$ характеристическое уравнение (26) при $n = 2k$ приводится к виду

$$\sum_{j=1}^{k} B_{k-j} \lambda^{2j} = 0, \tag{32}$$

где коэффициенты B_k и B_{k-1} выражаются через постоянные A_p, $p = 1, \ldots, k$.

Для случая $n = 2k$ при $k = 2N$ знак коэффициента B_k определяется выражением

$$-k^{2k} + C_{2k}^1 (k-1)^{2k} - \cdots + C_{2k}^{k-1},$$

значение которого равно $-\frac{1}{2}(2k)!$.

Для случая $n = 2k$ при $k = 2N+1$ знак коэффициента B_{k-1} определяется аналогичной суммой, значение который также меньше нуля. Случай, когда $n = 2k+1$, сводится к случаю $n = 2k$. Таким образом, условие Рауса–Гурвица для уравнения (32) не выполняется при всех n, удовлетворяющих условию $n > 4$. Следовательно, нулевое решение уравнения (25) при $n > 4$ и достаточно малом λ неустойчиво.

Без существенных изменений доказательство переносится на случай, когда среднее значение функций $p(t)$ в уравнении (25) отлично от нуля. Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Нулевое решение уравнения* (25) *с ω-периодической интегрируемой кусочно-непрерывной функцией $p(t)$ неустойчиво при достаточно малом λ и $n \geq 4$.*

Литература

1. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
2. Ляпунов А. М. Об одном ряде, относящемся к теории линейных уравнений // Собр. соч.: В 5 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 387–390.
3. Ляпунов А. М. Общая задача устойчивости движения // Там же. С. 5–263.
4. Ляпунов А. М. Об одном ряде, встречающемся в теории линейных дифференциальных уравнений // Там же. С. 410–472.
5. Шнейдер А. Е. О неустойчивости одного дифференциального уравнения n-го порядка с периодическими коэффициентами. Свердловск, 1986. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 01.07.86, №4791-В.
6. Шнейдер А. Е. Устойчивость одного дифференциального уравнения третьего порядка с периодическими коэффициентами // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск: УрГУ, 1986. С. 107–116.

Статья поступила 08.10.2002 г.
Окончательный вариант 07.12.2002 г.